Matematik Morgener
- **et udviklingsarbejde**

Af: *Morten Blomhøj og Mikael Skånstrøm*

Vi arbejder på et ønske om at udvikle en praksis, hvor eleverne kan blive optaget af at bruge matematik til at beskrive og forstå deres nære omverden og dermed blive motiveret for og få støtte til at lære matematik. Udviklingsarbejdet har baggrund både i en teoretisk matematikdidaktisk interesse for, hvad matematisk modellering kan betyde på folkeskolens ældste klassetrin, og i erfaringer med i praksis at bruge forskellige former for iscenesættelser i matematikundervisningen på dette niveau
(Alrø m.fl., 2000).

Som didaktisk begreb er matematisk modellering som oftest blevet knyttet til matematikundervisning på gymnasialt og universitært niveau. Begrundelsen har typisk været, at elever og studerende kan lære at anvende deres matematikviden ved at opstille, analysere og kritisere matematiske modeller. Tilegnelse af matematik kommer her forud for anvendelse i forbindelse med modellering. Kompetence til at kunne opstille, analysere og kritisere matematiske modeller er givet værdifuld i forhold til den rolle matematiske modeller spiller i samfundet i dag og kan dermed være et vigtigt sigte for matematikundervisningens bidrag til almendannelse (Blomhøj, 2001).

I forhold til matematikundervisning på børne- og ungdomstrinnet har matematisk modellering imidlertid først og fremmest sin didaktiske berettigelse ved at kunne skabe forbindelse mellem elevernes erfaringsverden og matematikkens begrebsverden og sprog. Konkret oplevede forbindelser, mellem praktiske situationer og problemer på den ene side og matematiske begreber og metoder på den anden side, kan styrke elevernes forståelse. Begreberne får mere mening og større faglig dybde for eleverne, når de kan knytte dem en til række forskellige situationer. Samtidig kan arbejdet med modellering gøre, at eleverne oplever matematik som en måde at anskue verden på og dermed på sigt bidrage til at bryde adskillelsen mellem skolematematikken og den virkelige verden. I udviklingsarbejdet ønsker vi at undersøge disse didaktiske ideers bærekraft i matematikundervisningen på 8.-10. klassetrin.

Udviklingsarbejdet har imidlertid også udgangspunkt i de problemer, man som matematiklærer kan opleve i den daglige praksis. Specielt på ungdomstrinnet har mange elever svært ved at finde meningen med den matematik, de bliver præsenteret for i skolen. For rigtigt mange bliver det overvejende instrumentelle motiver, der styrer deres deltagelse i undervisning. De søger at leve op til de krav, der stilles i undervisningen, men danner sjældent egne motiver, der knytter sig til det faglige indhold. Der er ikke noget de ønsker at blive klogere på - hverken i eller ved hjælp af faget matematik. En del elever møder endvidere alvorlige forståelsesvanskeligheder og bliver som følge heraf meget defensive i deres forhold til matematikundervisningen. Når der samtidig er meget store forskelle på elevernes faglige grundlag, når de starter i 8. klasse, tegner der sig en alvorlig pædagogisk udfordring for matematikundervisningen på ungdomstrinnet.

Med modellering og elevernes nære omverden som udgangspunkt forsøger vi at udvikle en praksis, hvor det er muligt at håndtere nogle af disse pædagogiske problemer.

Scenen sættes

Vækkeuret ringer! Din hånd rammer uret, der falder på gulvet. Du får fat i det, og slukker det med et suk ….. Du vender dig om på den anden side og prøver at forestille dig, at det er blevet lørdag. Men så mærker du den – lysten til at komme i gang, fordi der står matematik morgener på skemaet. Muntre matematik morgener med Morten & Mikael tænker du. Kl 8:00 skal du være sammen med alle de andre. En ny og spændende dag står forventningsfuld og venter på at blive taget i brug af netop dig.

Så tager du dine matematikbriller på og rejser dig fra den varme seng. Du går ud på badeværelset – tjekker måske lige elmåleren undervejs. På badeværelset smiler spejlet til dig, mens du tjekker om du er sluppet for bumser i løbet af natten.

Du børster tænder og forestiller dig, hvor sjovt det ville være at se, hvor lang en stribe man kunne lave, hvis man trykkede al tandpastaen ud på én gang…..
Du lader det varme vand pjaske ned over din krop i flere minutter – hov, hvor meget vand gik der egentlig til det?

Der er også matematik i klokken, vejret, morgenmaden, cykelturen, køreplanen, blandt andet… …

Efter denne introduktion fik eleverne følgende opgave med besked om, at de meget gerne måtte inspirere og hjælpe hinanden, men at de skulle aflevere hver deres personlige produkt:

Lav nøjagtige optegnelser af det, du ser med dine matematikbriller - fra du står op til du møder i skolen. Dine notater skal så bearbejdes matematisk, og dine resultater og overvejelser skal formidles på et stykke A3-papir i et indbydende layout. Du har fire moduler til det hele.

Rammerne om forløbet
Undervisningsforløbet foregår på Statens Pædagogiske Forsøgscenter (SPF). Eleverne går i 8. klasse og er startet på skolen i august 2002 – en måned før forløbet. Der er 48 elever - 24 drenge og 24 piger - som er udtrukket ved lodtrækning blandt cirka 250 ansøgere. Lodtrækningsmodellen er konstrueret, så elevgruppen er repræsentativ både fagligt og socialt. Eleverne kommer fra forskellige kommuner, flest fra København og Rødovre, hvor skolen ligger.

Matematik Morgener var elevernes første møde med matematik på SPF. De var delt i to hold i dette forløb, som varede fire moduler (4 x 90 minutter) for hvert hold. I hele forløbet var både Morten og Mikael til stede og arbejdede parallelt som støttende, motiverende og udfordrende lærere.

Hvad kom der ud af forløbet – vores umiddelbare vurdering?
Hvis afleveringsfrekvensen er et succeskriterium, så var det en succes. I mappen med alle produkterne sidder 47 ud af 48 mulige besvarelser. På hver eneste af dem er der historier med matematisk indhold, der hører til elevernes egen morgen - fra de stod op til de mødte i skole. Næsten alle lavede repræsentationer af og udregninger med egne data, og omkring en tredjedel forklarede deres beregninger. Nogle opstillede formler og regneudtryk med enheder, men kun få reflekterede i produktet over deres resultater. Næsten alle brugte grafiske repræsentationer som tegninger, kort, grafer og cirkeldiagrammer. Rigtig mange af eleverne har tydeligvis arbejdet godt og længe med layoutet.

Ved forløbets afslutning fremlagde tre elever på hvert hold deres arbejde, og der var spørgsmål og diskussion i klassen. Ved denne lejlighed og i endnu højere grad ved samtaler undervejs i forløbet viste det sig, at de fleste elever var i stand til og interesseret i at reflektere over deres resultater og fremgangsmåder.

Om det var på trods af eller fordi dette forløb var det første møde med matematik på skolen er ikke til at sige, men alle var de med på ideen fra første øjeblik. Ingen af eleverne havde erfaringer med at tage "matematikbrillerne" på og se på verden gennem dem. Så der skulle en matematisk-mental omstilling i deres hoveder til for at sætte dem på sporet. Nogle så straks fordele og pointer, mens andre gennem hele forløbet havde tydelige vanskeligheder ved selv at skulle få øje på og selv at formulere problemstillinger. Men der var hele tiden et stort aktivitetsniveau, både i klassen og de andre steder, eleverne søgte hen for at finde oplysninger. Når matematikopgaverne ikke bare lå færdigformulerede og parate til at modtage et enkelt svar, kan der gå lang tid med rent praktisk at få styr på arbejdet. Og det praktiske tog også lang tid i forbindelse med opbygningen af produktet, A3-siden. I arbejdet med matematik har eleverne klart brug for deres logiske intelligens, hvorimod de i en traditionel matematikundervisning måske ikke har brug for særlig mange af de andre intelligenser, fx den sproglige, den kropslige osv. Ved problemorienteret undervisning kommer langt flere intelligenser i spil, noget der efter vores overbevisning er med til at styrke både udbyttet og interessen for arbejdet med tal som udgangspunkt (Ejersbo & Skånstrøm, 2002).

Der var plads til alle elever i forløbet. Både de fysisk aktive drenge, der har svært ved at sidde på stolen et helt modul, og de omhyggelige piger, der gerne vil bruge tid på at lave et æstetisk produkt. Alle elever havde mulighed for at deltage, hver med deres interesse og faglige udgangspunkt, og muligheden for samtalen var til stede hele tiden.

Eleverne var gode til at arbejde sammen og til flittigt at bruge lærerne undervejs. Overvejelser, hypoteser, afprøvninger, ræsonnementer og systematiseringer blev en naturlig og nødvendig del af arbejdet. Dette giver grundlag for, at eleverne kan tale sammen på om noget fagligt relevant. Det giver samtidig læreren god mulighed for i samtalen at få et større kendskab til den enkelte elevs opfattelse af faget, af elevens formåen og potentiale.

Hvilke emner blev der arbejdet med?
Der er en del emner, der går igen i mange af elevernes besvarelser. Dels er der nogle, der ligger lige for, og dels inspirerer eleverne hinanden vældig meget. Men først og fremmest er det lærerens korte introduktion, eleverne tager bestik af. Hermed rejser der sig et pædagogisk dilemma. Hvis man ønsker eleverne selv skal overtage styringen af deres virksomhed i undervisningen, må man som lærer lave en nøje planlægning, der muliggør dette. Eleverne tager imidlertid imod enhver mulighed for at oversætte til konkrete handlingsanvisninger med kyshånd. Åbenhed kræver nøje planlægning, også af hvad man ikke vil sige.

På Internettet - på www.krak.dk - kan eleverne finde en nøje beskrivelse af deres skolevej. De kommer til skole på forskellig måde, men især cyklisterne kan få noget ud af at beregne deres gennemsnitshastighed med tilhørende samtale om blandt andet alle de stop, de har undervejs. Hvordan kan man grafisk vise en cykelturs komplicerede forløb. Der kan tegnes grafer, der viser sammenhængen mellem kørt strækning og forbrugt tid eller der kan skrives tidspunkter på en rute indtegnet på et kort, og hvad siger sådanne repræsentationer i forhold til fx samlet strækning, tid og gennemsnitshastighed? Det er sådanne spørgsmål, det bliver muligt at stille.

Et andet hit er tidsforbruget. Langt de flest registrerer deres gøremål i forhold til klokkeslæt, så en grafisk repræsentation i form af et cirkeldiagram er oplagt. Cirkeldiagrammet kommunikerer for de fleste meget klart rent visuelt, og så kan det udformes æstetisk med farver og udsmykninger; men under hvilke omstændigheder er det egentlig en hensigtsmæssig repræsentation? Morgenmaden og forskellige former for forbrug er også repræsenteret på mange af elevernes plakater.

Åben kanal
Det var karakteristisk for forløbet, at der ind imellem opstod dialoger mellem lærer og elev, hvor det tilsyneladende var muligt for læreren på en meget effektiv måde at støtte elevernes læring. Eleverne var typisk optaget af at få løst et problem eller beskrevet en situation ved hjælp af matematik. Det var som regel eleverne, der tog initiativ til at involvere lærerne. Det var ofte forbløffende lidt lærerne behøvede at sige – nogle gang var det nok blot at stille et enkelt spørgsmål – for at bringe eleverne videre. Eleverne var imidlertid mange gange meget interesseret i en uddybende dialog efter, at deres problem var løst. Og som lærere oplevede vi, at det i sådanne situationer var muligt gennem en kort dialog på afgørende måde at støtte centrale begrebsdannelser hos eleverne.

Metaforisk har vi valgt at karakterisere disse situationer med udtrykket "åben kanal". Elev og lærer var tunet ind på én og samme kanal, der var tilstrækkeligt afskærmet for uvedkommende støj. Når eleven har behov for at lave fx et cirkeldiagram til beskrivelse af et tidsforbrug, er der i høj grad skabt "en åben kanal". Som lærer kommer man i den ønskesituation, at eleven ligefrem kræver at lære noget konkret. Og eleven ønsker at lære her og nu, fordi hun har brug for svaret for at komme videre med noget, der optager hende lige nu.

Udgangspunktet for disse situationer er typisk, at eleven har et klart perspektiv for dialogen med læreren, nemlig at få løst et konkret problem. Hvis læreren i dialogen respekterer dette perspektiv og afstemmer sin faglige støtte i forhold hertil, gives et godt udgangspunkt for en udviklende dialog (Alrø og Skovsmose, 1999).

Det er oplagt, at kanalen hurtigt kan lukkes igen. Læreren kan komme for langt væk fra udgangspunktet i sin iver efter at formidle interessante faglige sammenhænge, eleven kan blive distraheret af kommentarer fra kammeraterne, eller det kan blive for kognitivt krævende for eleven at deltage i dialogen. "Åben kanal" er altså noget der kun optræder kortvarigt og momentvis i samtalerne med eleverne.

Vi beskriver her kort nogle af de situationer, hvor der efter vores vurdering er tale om "åben kanal".

Tandpastatuben
Lærke har taget hul på tandpastatuben. Hvor mange gange tandbørstning er der egentlig til i sådan en almindelig tube - og hvor lang kan striben blive, hvis man klemmer det hele ud på en gang? Det er spørgsmål som Lærke har stillet. Hun har noteret, at der er 75 ml i en tube. Hun har lavet nogle tegninger og opskrevet noget af en beregning af rumfanget af en stribe tandpasta. Nu er hun begyndt at trykke tandpasta ud på et stykke papir. Det involverer hun begge lærerne i. Hun spørger:
Lærke: Hvad skal jeg måle?;
Læreren: Hvad er det du vil finde ud af?
Lærke: Hvor meget der er i sådan en lille stribe – til en gang?
Læreren: Hvilken form har striben?
Lærke: Form? … Den er cylinderformet.
Læreren: Hvad skal du kende for at beregne rumfanget af sådan en?
Lærke: Er det ikke noget med h gang pi og r i anden?
Læreren: Jo, men hvad er h og r i forhold til din stribe tandpasta?
Lærke: h er højden – nej det må være længden af striben og r er radius, men hvordan måler jeg den?
Læreren: Prøv med en lineal. (Læreren går)

Lærke går straks i gang med at måle. Hun måler længden af striben til 1,5 cm. Hun prøver at måle radius ved snitte lodret ned gennem midteraksen i striben. Det er svært at måle på den måde, og hun bestemmer sig for at måle diameteren. Hun måler diameteren af hullet i tuben og diameteren af striben i et lodret snit, som hun laver med linealen. Efter en del målinger bestemmer hun sig for, at diameteren af en normal stribe er 0,7 cm. Radius beregnes til 0,35 cm. Hun har skrevet formlen for volumen af en cylinder:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ved indsættelse af de målte størrelser på en lommeregner med liniedisplay får hun:

$$\pi \cdot 0.35^2 \cdot 1.5 = 0.6\, cm^3$$

Efter at have snakket lidt med en kammerat om sagen skriver hun at 1 ml = 1 cm^3, og herefter beregner hun hvor mange tandbørstninger, der er til i tuben:

$$\frac{75\,ml}{0.6\,ml} = 125\ gange$$

Hun er overrasket over, at der er til så mange gange og kalder straks på læreren, fordi hun mener der må være en fejl. Sammen når de frem til at en familie på 4 kan bruge en tube på 15 dage, og det lyder jo meget rimeligt mener Lærke. Læreren udfordrer efterfølgende Lærke til at beregne, hvor lang en stribe, man kan lave af en hel tube. Lærke sætter 75 cm^3 ind i formlen for rumfanget, isolerer h og beregner med lommeregneren h til 195 cm. "Man kan sikkert lave en endnu længere, hvis man gør sig umage for at få en tynd stribe" – mener Lærke, der har vældig lyst til at prøve selv.

Den grønne bølge
Simon stiller tidligt i forløbet spørgsmålet om, hvordan man kan få såkaldt "grøn bølge" på Slotsherrensvej. Mickey siger, at der er en bestemt hastighed, der passer med, at man får grønt i begge kryds. "Hvad hvis man så kører med den dobbelte hastighed, passer det så også", spørger Simon. Sammen med Mickey må han ud på vejen for at se, hvad det er der sker i lyskrydsene for at konstatere, at det kan man ikke. Man kommer bare meget hurtigere hen for at holde for rødt. Mickey og Simon målte, hvor lang tid der gik fra det første kryds skiftede til grønt, til det anden kryds blev grønt. Samtidig bestemte de afstanden mellem krydsene ved hjælp af triptælleren i lærerens bil. Tilbage i klassen er det imidlertid ikke så nemt for Mickey og Simon at beregne med hvilken hastighed, man skal køre, for at få grøn bølge. De to målte størrelser (750 m og 85 sek.) kan ganges og divideres på flere måder. I løbet af meget kort tid forslår eleverne samtlige muligheder og forventer, at læreren skal afklare sagen. Simon bedyrer endda, at det med hastighed og sådan noget, kommer han aldrig til at forstå! Læreren beder eleverne skrive alle de mulige beregninger af hastigheden, som de har foreslået. Så spørger læreren: "Hvis nu der havde været lidt længere mellem krydsene og den samme tid, skulle man så køre hurtigere eller langsommere for at nå det?" Per intuition svarer begge elever: "Hurtigere". "Hvad så, hvis der havde været lidt mere tid men samme afstand?".
"Så kunne man køre langsommere" lyder det synkrone svar. "Hvilken måde at beregne hastigheden er så den rigtige?" Efter lidt betænkningstid bliver de enige om 750/85 som de udregner på lommeregneren til 8,82 og ser spørgende på læreren. "Hurtigt eller langsomt?" spørger læreren. Nu er eleverne blevet optaget af sagen, og der udspænder sig en længere dialog, hvor de får sat enheder på beregningen og omregnet hastigheden fra 8,82 m/sek. til 31,8 km/time.

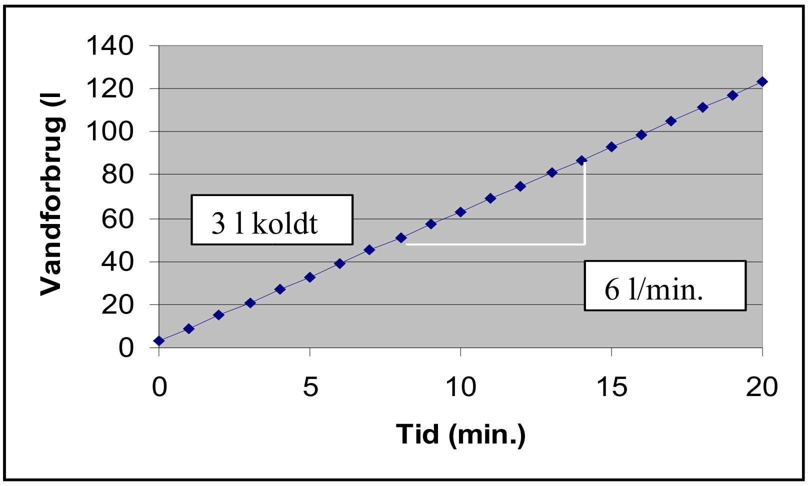
Det virker som om, de har fået en vigtig erfaring om betydningen af en størrelses enhed. Resultatet mener de passer fint med, at man godt lige kan nå det på cykel, hvis man får en flyvende start. Det går jo også lidt ned ad bakke, som Simon og Mickey minder hinanden om. Der bliver snakket om start og spurt og gennemsnitshastighed. Til sidst udfordrer læreren eleverne til at beregne den største og den mindste hastighed, som man kan køre med, hvis man skal over for grønt i begge kryds – på et skift naturligvis. Eleverne tager udfordringen op og laver nogle beregninger, men det kom ikke med på elevernes plakater, og læreren fik ikke fulgt op på det.

Tøjtælletræet
Stine ved ikke lige, hvordan hun skal håndtere at beskrive de mange valgmuligheder hun har, når hun skal tage tøj på om morgenen. Men det ved Louise, fordi hun har lige brugt et tælletræ til at illustrere de mange, mange muligheder, der findes for at komponere mad til madpakken - når hun altså kommer hjemme fra sin farmor. Louise lærer Stine at lave et tælletræ, mens læreren ser på. Det tager to minutter, og Stine får tilsyneladende helt styr på det. Hun tegner et tælletræ. "Hvis jeg har fire par bukser, fem bluser og tre jakker at vælge mellem, så har jeg $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ forskellige muligheder, og det er lig med antallet af grene i toppen af træet – så er det ikke så mærkeligt, at det tager lang tid at bestemme sig". "Hvad hvis der er noget, der ikke passer sammen?" – spørger læreren. "Så må man stryge nogle af forgreningerne!"

Louise arbejder med sin plakat.

Brusebadet
Der er flere af eleverne, der har beregnet hvor meget vand, de bruger til deres morgenbad. De har på forskellig måde målt, hvor meget vand der løber ud af bruseren. Morten (elev) har holdt en gulvspand ind under bruseren i et minut og bagefter målt, at der var 6 l i spanden. Han har skrevet på sit kladdepapir, at han bader i 10 min. og bruger 60 l vand. Læreren kommer forbi og de snakker om, hvordan målingen er lavet.
Læreren: Lader du ikke vandet løbe lidt, inden du går ind, så det ikke er koldt.
Morten: Jo, det tager nok omkring et halvt minut.
Læreren: Prøv at måle det også – i morgen. Men hvis du venter et halvt minut, hvor meget vand bruger du så i alt på dit bad.
Morten: 63 l.
Læreren: Kan du lave en tabel, der viser hvor meget vand du bruger, alt efter hvor lang tid du bader? (Læreren går)

Efter ca. 10 minutter har Morten lavet en tabel, der viser vandforbruget for 1-20 minutter. Morten forklarer, at han har lagt 6 til hver gang og at et bad på 1 min. kræver 9 l. Læreren udfordrer ham til også at tegne sammenhængen som en graf i et koordinatsystem. Morten laver et koordinatsystem på millimeterpapir og indtegner alle punkterne fra tabellen og en ret linie gennem dem.



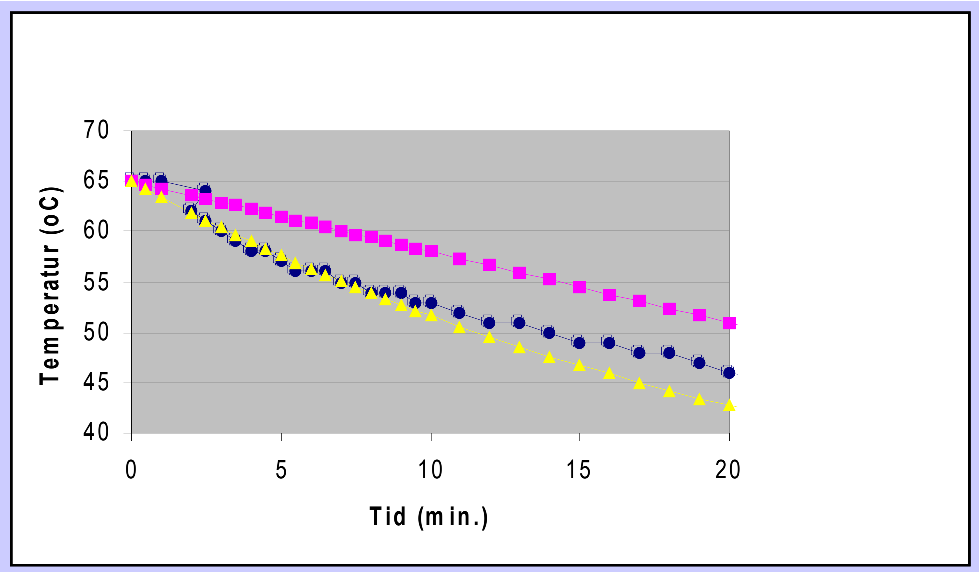
Lærer: Kan du også lave en formel, der kan beregne vandforbruget, når du indsætter hvor lang tid du vil bade?
Elev: Hvordan mener du …. man skal gange med 6 og lægge 3 til.
Lærer: Ja, det er helt rigtigt. Hvis du kalder badetiden for x og vandforbruget for y, kan du så lave en formel eller ligning for y?
Efter nogle minutter og lidt hjælp fra læreren når Morten frem til følgende ligning:

$$y = 6 \cdot x + 3$$

Morten prøver formlen for forskellige tider – den passer! Morten er glad for formlen og meget modtagelig for en samtale med læreren om liniens ligning, hældningskoefficient og skæring med 2. aksen – det er nye begreber for Morten. Såvel tabel, graf og ligning kom med på Mortens plakat med gode forklaringer, om hvad de enkelte variable og tal betyder. Til sidst i samtalen foreslår læreren, at Morten næste gang han er i bad skal tænke på, om han vil skrue op eller ned for hældningskoefficienten. Morten griner og siger: "men så passer beregningen jo ikke mere".

Kakaoen bliver kold
Mads – der tit køber kakao i automaten – er blevet optaget af at beskrive, hvordan kakaoens temperatur ændres, efter den er kommet ud af automaten. Nogle gange kommer han til at trække en kakao for sent til, at han kan nå at drikke den inden næste time, og så brænder han

tungen. Til det andet modul har Mads købt en kakao, og han måler temperaturen under afkølingen med et termometer fra fysiksamlingen. Til næste matematikmodul har Mads indtastet sine data i et Excel regneark. Han får tegnet en graf over sine data, og viser den til læreren.



Det er grafen med cirkler i figur 2.

Figur 2: Viser måledata og to modeller for kakaoens temperatur.

De taler om, hvordan kurven videre vil forløbe, og om man kan beskrive den med matematik. Mads siger, at temperaturen vil blive ved med at falde, til den har samme temperatur som rummet. Hvordan det vil ske, ved han ikke, men han viser med hånden, at han som en mulighed tænker, at den måske falder som en retliniet forlængelse af kurven for målepunkterne på skærmen. Læreren spørger, om Mads kan lave en formel i regnearket som viser, hvordan temperaturen ville ændre sig, hvis den faldt med et konstant antal grader hvert minut og gøre det, så man let kan ændre denne afkølingskonstant. Det kunne være vores første model for, hvordan afkølingen kan beskrives matematisk. Mads – der nok ikke helt ved hvad læreren forstiller sig - går ind i regnearket i en søjle ved siden af måledata (tiderne står i søjle A og temperaturene i søjle B).

Mads: Hvilken temperatur skal vi starte med?
Læreren: Den skal vel starte ved samme temperatur som kakaoen.
Mads: Ok 65 grader – Mads taster.
Læreren: Hvad så i næste celle, det er et halvt minut senere.
Mads: Der skal vi trække noget fra, men hvor meget?
Læreren: Hvis vi skriver konstanten i celle C2, og starter med at indsætte, hvor meget temperaturen ca. aftager for hvert minut, så kan du bruge denne celle i formlen. Hvad skal vi sætte den til i starten.
Mads: 1 grad per minut, det passer meget godt. Men der går jo kun et halvt minut – så det er vel kun det halve der skal trækkes fra?
Læreren: Ja, og for at det skal være den samme celle, når du kopierer formlen, skal du skrive "C4- 0,5*C2".

Mads kopierer formlen ned til 60 minutter, og ser at de beregnede temperaturer er næsten konstante fra 20 minutter, mens de målte stadig falder.

Mads: Der er noget galt. Det passer ikke.
Læreren: Hvad sker der efter 20 minutter?
Mads: Der målte jeg kun hvert 10. minut.
Læreren: Så passer formlen heller ikke. Den beregner jo faldet på et halvt minut. Prøv om du kan lave en formel, der tager hensyn til, hvor lang tid der går mellem hver måling.

Efter ca. 10 minutter har Mads fået ændret formlen til "C4 – (A5-A4)*C2" og tegnet grafen for de beregnede temperaturer sammen med de målte data. Han kalder på læreren med bemærkningen "Se det bliver en ret linie" (grafen med firkanter i figur 2).

I fællesskab prøver de at ændre på konstanten for at få den bedste overensstemmelse mellem model og måledata, men det er ikke muligt at få særlig god overensstemmelse i hele intervallet. Undervejs spørger læreren om, hvad der vil ske i modellen, når temperaturen når rumtemperaturen (som Mads har målt til 21 grader).

Mads: Den bliver ved med at falde!

Læreren: Ja, det er rigtigt. Modellen forudsiger faktisk, at kakaoen fryser til is, hvis vi venter længe nok. (Mads griner). Lad os se, om vi kan lave en model, der ikke har det problem.

Ved fælles hjælp får de opbygget en formel, hvor temperaturfaldet afhænger af forskellen mellem kakaoen's aktuelle temperatur og rumtemperaturen. Modellen bliver beregnet i søjle D og formlen kommer til at se sådan ud: "D4 – (A5-A4)*D2*(D4-D1)", hvor rumtemperaturen står i celle D1 og D2 er en modelkonstant.

Mads eksperimenterer med størrelsen af konstanten og udtegner flere grafer. Han finder ud af, det faktisk er muligt at opnå rimelig god overensstemmelse mellem målepunkterne og den anden model. Grafen med trekanter i figur 2 er et af resultaterne fra den anden model.

Oplevelser og holdningsændringer

Undervejs i forløbet oplevede vi flere gange, at eleverne gav udtryk for positive oplevelser, og nogle elever proklamerede endda en for dem ny positiv holdning til faget..

Eleverne har haft omkring 1000 matematiklektioner, når de starter i 8. klasse. Langt de fleste har en meget fast og ofte meget stereotyp opfattelse af, hvad faget er, og hvordan det praktiseres i folkeskolen. Mange er rigtig glade for og trygge ved denne undervisning, men der er også mange, som er rigtig kede af den.

Undervejs i forløbet stiller nogle elever også spørgsmålstegn ved, om det nu er godt nok - om de nu lærer nok, og om de lærer det, de skal. Og det at arbejde uden en lærebog kan da også gøre nogle utrygge. Men de fleste synes rigtig godt om arbejdsformen, om udfordringen og om mulighederne for at arbejde selvstændig og med ansvar for deres eget produkt. Tine synes ligefrem, at matematik nu er hendes bedste fag, og Rasmus mener ikke, at han nogen sinde har lavet så meget matematik. Og det har han såmænd nok ret i, tyder det på. Simon mener, at han nu bedre forstår det med hastighed, og Louise forstår bedre, hvorfor det tager hende så lang tid at tage tøj på. Stefan kan beregne rumfanget (!) af sin papegøje, og Ida vil nu begynde at cykle til skole, efter det er gået op for hende, at halvdelen af rejsetiden med de offentlige transportmidler er ventetid.

Iscenesættelse som pædagogisk virkemiddel

En iscenesættelse som Matematik Morgener muliggør et samspil mellem elevernes erfaringer, undervisningens indhold og matematisk modellering. Den kan tillige skabe en ramme omkring undervisningen, der giver plads til alle elever. Den enkelte elev kan bruge sit eget sprog til at give mening til den matematik, hun arbejder med. Iscenesættelsen giver mulighed for, at eleverne selv kan danne sig en mening med deres konkrete faglige undersøgelser, indsamling og bearbejdning af data.

Det er iscenesættelsen, der giver grundlaget for, at eleverne kan styre deres egen virksomhed. Når det sker, opstår nye pædagogiske muligheder. I samtale med elever, der er optaget af at løse et problem, som de føler er deres eget, har læreren gode muligheder for at få indsigt i elevernes tankeprocesser. Og som illustreret med eksemplerne på "åben kanal" opstår der mulighed for meget læringseffektive dialoger mellem lærer og elev og mellem eleverne indbyrdes.

Modellering som undervisningsform

Når matematik anvendes til at beskrive, beregne, forudsige, forstå eller forme forhold i den virkelige materielle verden, er der altid involveret en eller anden form for model. Hvis man i matematikundervisningen arbejder med anvendelser, arbejder man altså med matematiske modeller. Men hvis man som lærer ikke arbejder bevidst på det, vil anvendelserne ikke nødvendigvis bidrage til, at eleverne oplever relationen mellem matematikken og deres omverden.

Modellering som undervisningsform handler om at arbejde bevidst med relationen mellem matematik og den virkelige verden. Det kræver, at man tager både virkeligheden og matematikken alvorligt. En matematisk model angår en relation mellem noget matematik og en virkelig situation, og kun hvis man kan fastholde en synsvinkel, hvor man kan se både matematikken og virkeligheden, kan man erkende, kritisere eller bevidst opstille en matematisk model (Blomhøj, i tryk).

I dette forløb nåede vi ikke så langt, hvad angår elevernes bevidste arbejde med og refleksion over matematisk modellering. De fleste elever oplevede på intet tidspunkt, at de arbejdede med matematisk modellering. Men alle elever fik nogle – for manges vedkommende første – vigtige erfaringer med selv at bruge matematik til at beskrive og forstå deres nære omverden. Disse erfaringer vil der i høj grad kunne bygges videre på i arbejdet med matematisk modellering.

Afslutning

Vi iværksatte Matematik Morgener for at fokusere på begrebet modellering, og på hvordan det er muligt at arbejde med dette begreb i undervisningen. Vi kom et stykke vej, men ikke så langt, som vi havde håbet og troet. Imidlertid fortsætter samarbejdet de kommende år, og målet er, at eleverne afslutter de tre års undervisning i matematik (8.-10. klassetrin på SPF) med at være bevidst arbejdende med matematisk modellering. Vi har besluttet, at de næste emner skal være mere fastlagte og styrede, så eleverne kan få fælles oplevelser med nogle eksemplariske modelleringsforløb. Med udgangspunkt i nogle af de problemstillinger, der blev arbejdet med under matematik morgenerne, vi vil gerne skabe nogle fælles faglige oplevelser for alle eleverne. Og dermed få grundlag for at udfordre dem til at arbejde mere bevidst med matematisk modellering. Vi har allerede taget hul på et sådant forløb. Udgangspunktet er elevernes brug af begrebet hastighed, som flere af eleverne så med sine matematikbriller. Her vil vi arbejde mere systematisk med at bruge dette begreb til modellering og med kritik af modeller, der handler om hastighed. Vi har valgt hastighed som tema fordi alle elever har erfaringer med og intuitive opfattelser af dette begreb. Samtidig er modellering af forskellige hastighedsfænomener meget velegnet, når det drejer sig om at udvikle elevernes forståelse af matematiske begreber som variabel, brøk, funktion og grafisk afbildning, og når det som noget meget væsentligt i modellering handler om at indse betydningen af at regne med enheder.

Matematikundervisning handler imidlertid om andet end matematisk modellering, og der er derfor både interessante og vanskelige afvejninger at foretage i den pædagogiske tilrettelæggelse, når man ønsker at gøre matematikundervisningen mere virkelighedsnær og vedkommende for eleverne. Held og lykke med den udfordring.

Referencer

Alrø, H. og Skovsmose, O. (1999): *Samtalen som et støttende stillads*. Center for Forskning i Matematiklæring. Danmarks Pædagogiske Universitet, Roskilde Universitetscenter og Aalborg Universitet, Tekst nr. 8.

Alrø, H., M. Blomhøj, H. Bødtkjer, O. Skovsmose og M. Skønstrøm (2000): Farlige små tal – almendannelse i et risikosamfund. *Nordisk matematikdidaktikk* 8 (4), 27-52.

Blomhøj, M. (1993): Modellerings betydning for tilegnelsen af matematiske begreber, *Nordisk matematikdidaktikk* 1 (1), 18-38.

Blomhøj, M. (2001): Hvorfor matematikundervisning? – matematik og almendannelse i et højteknologisk samfund. I Niss, M. (red.) *Matematik og verden*, 219-246, Fremad.
Blomhøj, M. (i tryk): Modellering som undervisningsform.
I Skovmose, O. og Blomhøj, M. (red.) *Kan det virkelig passe – 123 matematiklæring*.
L&R Uddannelse, København.
Ejersbo, L.R. og M. Skånstrøm (2002): Klip og kompetencer. *Crit* nr. 28